Chapter 4

黎曼曲率与Gauss-Bonnet公式

4.1 黎曼曲率

对黎曼流形(M,g), 局部上$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$. 虽然g不依赖于坐标选取，但g_{ij}是依赖的. 我们是否可以找一个好的坐标使得$g_{ij}=\delta_{ij}$? 如果能够找到，黎曼流形局部上和欧氏空间就没有任何区别了, 此时我们就可以认为流形在这个局部是平的: 如果一个坐标卡内的度量可以取为$g=\delta_{ij}dx^i\otimes dx^j$, 我们称$g$在这个坐标卡内平坦,如果对每一点$p\in M$, g都在包含 p的某个坐标卡下平坦,则称黎曼流形 (M,g)是**平坦流形**(flat manifold).

但一般情况下，黎曼流形不都是平坦的。接下来我们来看一下黎曼流形何时是平坦的？一般的黎曼流形距离平坦流形有什么障碍？这个障碍应该反应了黎曼流形的弯曲程度。

问题: 对黎曼度量$g=g_{ij}dy^i\otimes dy^j$,何时$\exists$坐标变换$x=x(y)$, s.t. $g=\delta_{ij}dx^i\otimes dx^j$在整个坐标卡上成立?

(下面的推导是黎曼当年做出的) 我们假设存在$\delta_{st}dx^s\otimes dx^t=g_{ij}dy^i\otimes dy^j$, 则由指标的变换可知

$$\delta_{st}\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}=g_{ij}, \tag{4.1}$$

$$g^{ij}=\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\frac{\partial y^j}{\partial x^t}\delta^{st}, \tag{4.2}$$

且

$$g^{ij}\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}=\delta^{st}. \tag{4.3}$$

对(4.1)式关于y^k求导

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}=\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^i\partial y^k}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}\delta_{st}+\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^j\partial y^k}\frac{\partial x^t}{\partial y^i}\delta_{st},$$

进行简单的指标轮换,即得

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^i\partial y^j}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\delta_{st}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\Big). \tag{4.4}$$

两边同乘$g^{km}\frac{\partial x^q}{\partial y^m}$, 并对$m$求和，有

$$g^{km}\frac{\partial x^q}{\partial y^m}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^i\partial y^j}\delta_{st}=\frac{1}{2}g^{km}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\Big)\frac{\partial x^q}{\partial y^m}=\Gamma_{ij}^m\frac{\partial x^q}{\partial y^m}. \tag{4.5}$$

由(4.3)可得对$\forall s$,

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^i\partial y^j}=\Gamma_{ij}^m\frac{\partial x^s}{\partial y^m}. \tag{4.6}$$

设$\alpha_j^s=\frac{\partial x^s}{\partial y^j}$, 由(4.6),有

$$\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^i}(y)=\Gamma_{ki}^m(y)\alpha_m^s(y),\ 1\le j,k\le n. \tag{4.7}$$

这是一个我们前面见过的一阶线性微分方程组.

由上述讨论可知，若 g在某个坐标卡下平坦,则坐标变换一定满足(4.7)条件.**如果(4.7)无解,则g不平坦**.但我们前面课程讨论过：(4.7)成立需要满足相容性条件$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^j}\Big)=\frac{\partial}{\partial y^j}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^i}\Big)$. 由(4.7)得到

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^j}\Big)=\frac{\partial\Gamma_{kj}^m}{\partial y^i}\alpha_m^s(y)+\Gamma_{kj}^m\Gamma_{mi}^l\alpha_l^s(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^i}\Big)=\frac{\partial\Gamma_{ki}^m}{\partial y^j}\alpha_m^s(y)+\Gamma_{ki}^m\Gamma_{mj}^l\alpha_l^s(y).$$

由于$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^j}\Big)=\frac{\partial}{\partial y^j}\Big(\frac{\partial\alpha_k^s}{\partial y^i}\Big)$,则有

$$\Big\{\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial y^i}-\frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial y^j}+\Gamma_{kj}^m\Gamma_{mi}^l-\Gamma_{ki}^m\Gamma_{mj}^l\Big\}\alpha_l^s(y)\equiv 0.$$

命题 4.1.1. *(4.7)在局部上有解,当且仅当在该邻域内,有*

$$\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial y^i}-\frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial y^j}+\Gamma_{kj}^m\Gamma_{mi}^l-\Gamma_{ki}^m\Gamma_{mj}^l=0,\forall i,j,k,l. \tag{4.8}$$

像之前一样，我们记

$$R^l_{kji} := \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial y^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial y^j} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj}. \tag{4.9}$$

对$p \in M$，任取一个坐标卡，若$\exists j, l, k, \gamma$使得 $R^l_{kji} \neq 0$,则(M, g)在p点附近不平坦. 所以R^l_{kji}衡量了黎曼流形的弯曲程度。

习题 4.1.2. 证明$R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$是一个$(1,3)$型张量，即它和坐标选取没有关系。

定义 4.1.3 (黎曼曲率)**.** 记

$$R_{ijkl} := g_{im} R^m_{jkl}, \tag{4.10}$$

为流形在坐标卡下的黎曼曲率。

前面我们已经算过

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klij} = -R_{ijlk}. \tag{4.11}$$

由习题4.1.2知, $R := R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$是一个(0,4)型张量,称为曲率张量.

定义 4.1.4. 若$\dim M = 2$,则定义其Gauss曲率为

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{12}^2 - g_{11} \cdot g_{22}}.$$

当g为曲面的第一基本形式时，此即为曲面的Gauss曲率.

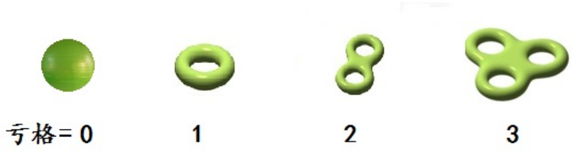
所以若曲面的Gauss曲率非零，则曲面不是平坦的。

4.2 Gauss-Bonnet formula

在前言中，我们提到了古典微分几何最重要的结果之一：Gauss-Bonnet 公式，我们在课程末尾给出Gauss-Bonnet公式的证明。

定义 4.2.1 (闭曲面)**.** 设S是一个二维微分(无边)流形。如果S同时还是$\mathbb{R}^3$的一个紧子集且S的拓扑与$\mathbb{R}^3$诱导到S上的拓扑一致，我们称S是一个闭曲面。

显然S^2, T^2都是闭曲面。在拓扑上，我们可以用亏格对闭曲面做完整的分类：若闭曲面S_1，S_2有相同的亏格，则S_1与S_2同胚且对任意$g \in \mathbb{N}$, 存在曲面S_g，使得S_g的亏格为g.



由拓扑学的内容可知，任意闭曲面S上都存在一个由有限个三角形组成的三角剖分。剖分的面的个数减边的个数加顶点个数是一个和三角剖分无关的量，称为闭曲面的欧拉数，记为$\chi(S)$. 设g是S的亏格，我们有

$$\chi(S) = 2(1-g). \tag{4.12}$$

定理 4.2.2 (Gauss-Bonnet公式)**.** *设S是$\mathbb{R}^3$中的一个闭曲面，则有*

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S). \tag{4.13}$$

根据三角剖分，我们可以先在一个坐标卡上的小三角形上考虑问题。

我们首先证明一个引理

引理 4.2.3 (Liouville 公式)**.** *设(u,v)为曲面S上的正交参数系。设曲线$\gamma(u(s),v(s))$是曲面上的一条弧长参数曲线。记曲线与参数u曲线的夹角为θ. 则曲线的测地曲率*

$$\kappa_g = \dot{\theta}(s) - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial v}\sin\theta. \tag{4.14}$$

证明. 记

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\mathbf{r}_u, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{r}_v. \tag{4.15}$$

则$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$是参数u曲线和v曲线的单位切向量且$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. 我们有

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{u}(s)\mathbf{r}_u + \dot{v}(s)\mathbf{r}_v = \dot{u}(s)\sqrt{E}\mathbf{e}_1 + \dot{v}(s)\sqrt{G}\mathbf{e}_2. \tag{4.16}$$

因为曲线γ与参数u曲线的夹角为θ，

$$\dot{\gamma}(s) = \cos\theta(s)\mathbf{e}_1 + \sin\theta(s)\mathbf{e}_2, \quad \cos\theta(s) = \dot{u}(s)\sqrt{E}, \quad \sin\theta(s) = \dot{v}(s)\sqrt{G}. \tag{4.17}$$

由(4.17),

$$\ddot{\gamma}(s) = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}(s)\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\cdot\dot{\theta}(s)\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} + \sin\theta\frac{d\mathbf{e}_2}{ds}. \tag{4.18}$$

注意到

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \times \dot{\gamma} = -\sin\theta\, \mathbf{e}_1 + \cos\theta\, \mathbf{e}_2, \tag{4.19}$$

测地曲率

$$\kappa_g = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{e} \rangle = \dot{\theta}(s) + \cos\theta \,\langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e} \rangle + \sin\theta \,\langle \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}, \mathbf{e} \rangle. \tag{4.20}$$

因$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$,

$$\langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0, \quad \langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \rangle = -\langle \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}, \mathbf{e}_1 \rangle. \tag{4.21}$$

所以

$$\kappa_g = \dot{\theta}(s) + \langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \rangle. \tag{4.22}$$

由(4.15)式，

$$\langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}}(\dot{u}(s)\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle + \dot{v}(s)\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle). \tag{4.23}$$

其中

$$\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle_u - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \tag{4.24}$$

$$\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{4.25}$$

综上可得

$$\kappa_g = \dot{\theta}(s) - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial v}\sin\theta. \tag{4.26}$$

□

由引理4.2.3,我们可以得到局部上的Gauss-Bonnet公式.

引理 4.2.4. 设$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$是曲面片$S$上的一条由*3*段光滑曲线组成的分段光滑闭曲线。设D是由γ围成的单连通区域。取γ的定向使得D在γ的左侧。设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是三个角点对应的外角（即$\pi -$内角），则有

$$\int_\gamma \kappa_g ds + \int_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i. \tag{4.27}$$

证明. 取曲面的一个正交参数系$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. 取$s$为曲线$\gamma$的弧长参数。记$\theta(s)$为曲线$\gamma$与$u$曲线在$s$处的夹角，则由引理4.2.3与(4.17),

$$\begin{aligned}\int_\gamma \kappa_g ds &= \int_\gamma \dot\theta(s)ds + \int_\gamma \left(-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial v}\sin\theta\right)ds \\ &= \int_\gamma \dot\theta(s)ds + \int_\gamma \left(-\frac{\sqrt{E}}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}du + \frac{\sqrt{G}}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial v}dv\right) \\ &= \int_\gamma \dot\theta(s)ds + \int_\gamma \left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv\right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

将曲面片对应到uv平面上，可知

$$\int_\gamma \dot\theta(s)ds + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i = 2\pi. \tag{4.29}$$

由Green公式，

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv\right) &= \int_D \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)dudv \\ &= -\int_D K d\sigma. \end{aligned} \tag{4.30}$$

所以我们得到了引理4.2.4. □

我们现在来证明Gauss-Bonnet公式。

取$T_1, \cdots, T_N$是S的一个三角剖分，使得每条边都是一条光滑曲线且每个三角形都在流形S的一个坐标卡（曲面片）中。设$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}$是三角形 T_i的三个外角. 记$\beta_{i_j} = \pi - \alpha_{i_j}$, $j = 1,2,3$ 是T_i的三个内角. 由引理4.2.4,有

$$\int_S K d\sigma + \sum_{i=1}^N \int_{\partial T_i} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^N (3\pi - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - \beta_{i_3}) = 2\pi N. \tag{4.31}$$

由于在求和中，$\int_{\partial T_i} \kappa_g ds$在每个边上都出现两次，且方向相反，故

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial T_i} \kappa_g ds = 0.$$

记V为剖分的顶点数，E为剖分的边数。此时N为剖分的面数. 因为在顶点处三个内角的和为2π,有

$$2\pi N - \sum_{i=1}^N (3\pi - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - \beta_{i_3}) = 2\pi V - \pi N. \tag{4.32}$$

由于每条边是两个三角形的边，我们有

$$3N = 2E. \tag{4.33}$$

所以

$$2\pi N - \sum_{i=1}^{N}(3\pi - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - \beta_{i_3}) = 2\pi(V - E + N) = 2\pi\chi(S). \tag{4.34}$$

这样我们就得到了Gauss-Bonnet公式.